



Statistica bayesiana per lo studio di sequenze di terremoti

Elisa Varini

CNR - Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche

18 ottobre 2023



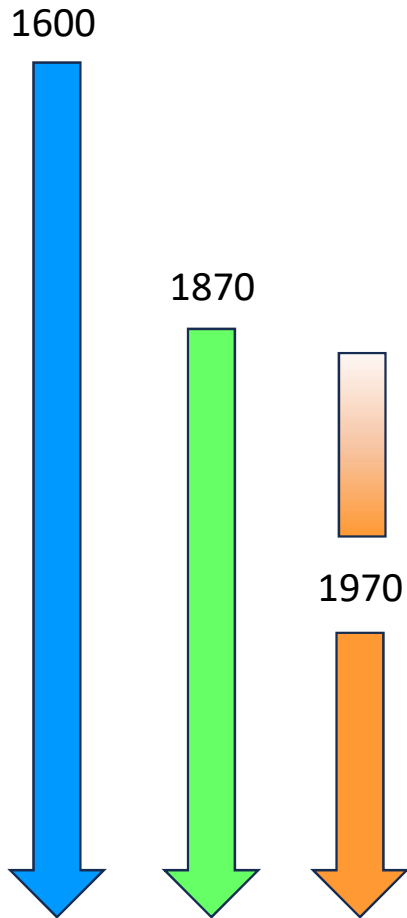
Il Centenario del CNR è realizzato con il contributo della Presidenza del Consiglio dei Ministri e con il Patrocinio di Rai

PRESIDENZA DEL CONSIGLIO
DEI MINISTRI

Struttura di missione anniversari nazionali
ed eventi sportivi nazionali e internazionali



Sismologia Statistica



Statistica

Disciplina matematica che studia insiemi di dati di un particolare fenomeno *in condizioni di incertezza e/o parziale conoscenza*.

Sismologia

Disciplina della Geofisica che studia i terremoti e la propogazione delle onde sismiche attraverso il terreno.

Sismologia Statistica

Disciplina che studia le sequenze sismiche con *metodi di probabilità e statistica*:

- come si distribuiscono i terremoti nello spazio, nel tempo e nella magnitudo?
- come i terremoti interagiscono tra loro e si raggruppano?

Nella valutazione della pericolosità sismica e previsione dei terremoti di una regione, la **modellazione probabilistica di parametri sismici** è di fondamentale importanza.

I **parametri sismici** di interesse sono tipicamente:

- la magnitudo,
- il tempo di accadimento,
- le coordinate spaziali dell'epicentro.

Lo scopo è solitamente **trovare la miglior distribuzione di probabilità del parametro sismico** sulla base della sismicità che ha interessato la regione in un periodo di tempo sufficientemente lungo.

- La distribuzione di probabilità dei parametri sismici può variare nel tempo?
- Queste variazioni possono essere associate alle fasi del ciclo sismico?

Distribuzione q -esponenziale

I sistemi nonlineari dinamici che mostrano proprietà frattali e correlazioni su scala sia lunga che breve sono studiati nell'ambito della **meccanica statistica nonestensiva**.

La presenza di queste proprietà anche nella sismicità suggerisce di analizzare il comportamento dell'attività sismica nel tempo attraverso la **distribuzione q -esponenziale**.

Sotto opportuni vincoli, la si ottiene massimizzando l'**entropia non-additiva di Tsallis** (1988):

$$S_q[f] = \frac{1 - \int f^q(x) dx}{q - 1}$$

dove $f(x)$ è una densità di probabilità e q è detto **indice entropico**.

Quando $q \rightarrow 1$, si ottiene l'**entropia di Boltzmann-Gibbs**

$$\int_0^{+\infty} f(x) \log f(x) dx$$

che è **additiva**.

Distribuzione q-esponenziale

Il problema è **determinare la densità di probabilità $f(x)$ che ottimizza l'entropia S_q di Tsallis sotto questi vincoli:**

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_0^{+\infty} x f^q(x) dx = X_q < +\infty$$

dove $f_q(x) \propto f^q(x)$ è la densità della cosiddetta distribuzione *escort*¹,

massimizzando il funzionale

$$\phi(f, \lambda_0, \lambda_1) = S_q + \lambda_0 \left(\int_0^{+\infty} f(x) dx - 1 \right) + \lambda_1 \left(\int_0^{+\infty} x f^q(x) dx - X_q \right)$$

con λ_0 e λ_1 **moltiplicatori di Lagrange**.

¹così che il principio di conservazione dell'energia valga su scala sia microscopica sia macroscopica

Distribuzione q -esponenziale

Il risultato è la densità della **distribuzione q -esponenziale**:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{(1-q)}{(2-q)} \cdot \frac{x}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-q}} \quad \text{per } 1 < q < 2, \quad x \geq 0 \quad (\text{sub-additività})$$

$$f(x) = \frac{1}{Z_q} [1 - (1-q)\lambda'x]^{\frac{1}{1-q}} \quad \text{per } q < 1, \quad x \in (0, x_{max}) \quad (\text{super-additività})$$

dove x_{max} è il massimo valore per cui $f(x)$ rimane positiva.

Obiettivo

Studiare l'**indice entropico q** come descrittore di criticalità del sistema ottenuto dalla massimizzazione dell'entropia di Tsallis.

Distribuzione q -esponenziale

La **distribuzione q -esponenziale** (nel caso sub-additivo) è definita dalla densità:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{(1-q)}{(2-q)} \cdot \frac{x}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-q}} \quad \text{per } x \geq 0$$

dove $1 < q < 2$ è detto **indice entropico**,

$\beta > 0$ è il valore atteso rispetto alla seguente distribuzione $f_q(x) \propto f^q(x)$.

La distribuzione q -esponenziale:

- quando $q \rightarrow 1$, è una distribuzione esponenziale
- ha code pesanti (cioè coda sopra quella della distribuzione esponenziale):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(x)}{e^{-tx}} = +\infty \quad \forall t > 0$$

- è nota come **distribuzione generalizzata di Pareto** nella teoria dei valori estremi.

Stima bayesiana della distribuzione q-esponenziale

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{(1-q)}{(2-q)} \cdot \frac{x}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-q}} \quad \text{per } 1 < q < 2, \quad x \geq 0$$

Conviene riparametrizzare il modello ponendo $\theta = \frac{2-q}{q-1} > 0$.

Secondo il **paradigma bayesiano**, i parametri θ e β del modello sono variabili casuali.

Informazioni su questi parametri si traggono da:

- la **funzione di verosimiglianza**

$$\mathcal{L}(f(\mathbf{x} | \theta, \beta)) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta, \beta)$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sono i dati estratti dal modello q -esponenziale;

- le **distribuzioni a priori**

$$p_0(\theta) \sim \text{Lognormal}(\text{median}_{\theta}, \text{varianza}_{\theta})$$

$$p_0(\beta) \sim \text{Lognormal}(\text{median}_{\beta}, \text{varianza}_{\beta})$$

Stima bayesiana della distribuzione q-esponenziale

Il teorema di Bayes combina le informazioni disponibili nella **distribuzione a posteriori**:

$$p(\theta, \beta | \mathbf{x}) = \frac{p_0(\theta) p_0(\beta) \mathcal{L}(f(\mathbf{x} | \theta, \beta))}{\int_{\Theta} p_0(\theta) p_0(\beta) \mathcal{L}(f(\mathbf{x} | \theta, \beta)) d\theta d\beta}$$

Applicando l'algoritmo Markov chain Monte Carlo di Metropolis-Hastings, si simula una **catena di Markov** che ha la distribuzione a posteriori come distribuzione di equilibrio:

- si campionano valori iniziali θ_0 e β_0 dalle distribuzioni a priori, si pone $i = 0$,
- si campionano valori candidati $\tilde{\theta}$ e $\tilde{\beta}$ dalle distribuzioni di proposta $q(\theta | \theta_i)$ e $q(\beta | \beta_i)$
- si calcola la probabilità di accettazione

$$\alpha_i = \min \left(1, \frac{p_0(\tilde{\theta}) p_0(\tilde{\beta}) \mathcal{L}(f(\mathbf{x} | \tilde{\theta}, \tilde{\beta})) q(\tilde{\theta} | \theta_i) q(\tilde{\beta} | \beta_i)}{p_0(\theta_i) p_0(\beta_i) \mathcal{L}(f(\mathbf{x} | \theta_i, \beta_i)) q(\theta_i | \tilde{\theta}) q(\beta_i | \tilde{\beta})} \right)$$

- si accetta $\tilde{\theta}$ e $\tilde{\beta}$ come θ_{i+1} e β_{i+1} con probabilità α_i ,
oppure si pone $\theta_{i+1} = \theta_i$ e $\beta_{i+1} = \beta_i$ con probabilità $1 - \alpha_i$.

Sequenza sismica di Amatrice-Norcia

24 agosto 2016, M_w 6.0 Amatrice

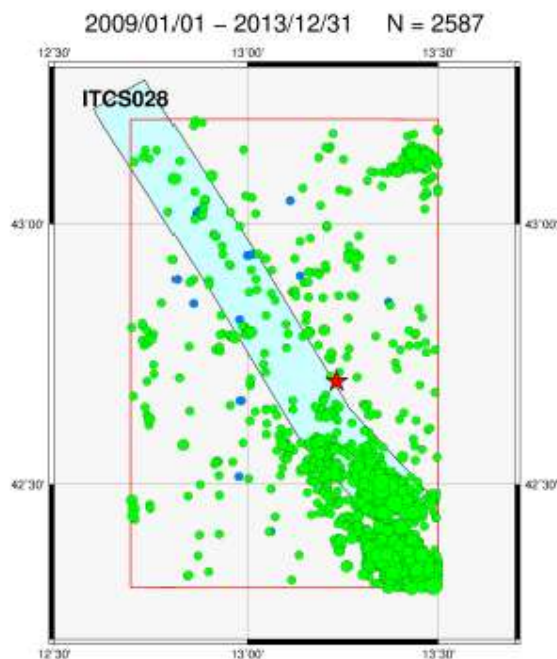
30 ottobre 2016, M_w 6.5 Norcia



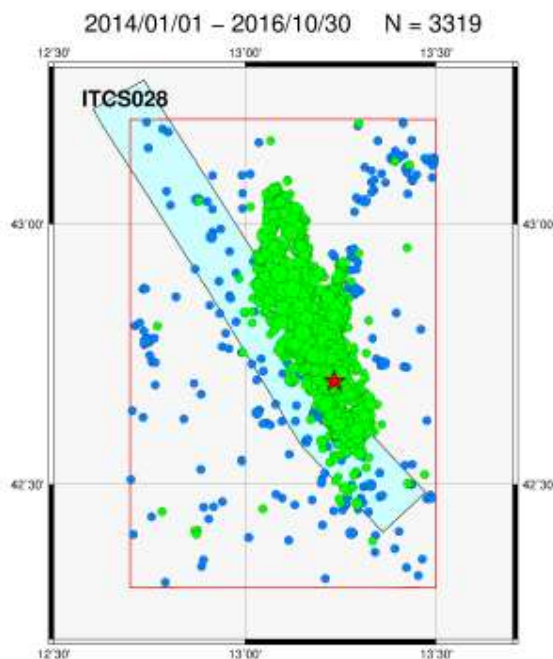
13745 terremoti, $m_0 \geq 2$, dal catalogo strumentale ISIDE
dal 1 gennaio 2009 al 30 giugno 2018

Lat 42.3-43.2 Lon 12.7-13.5

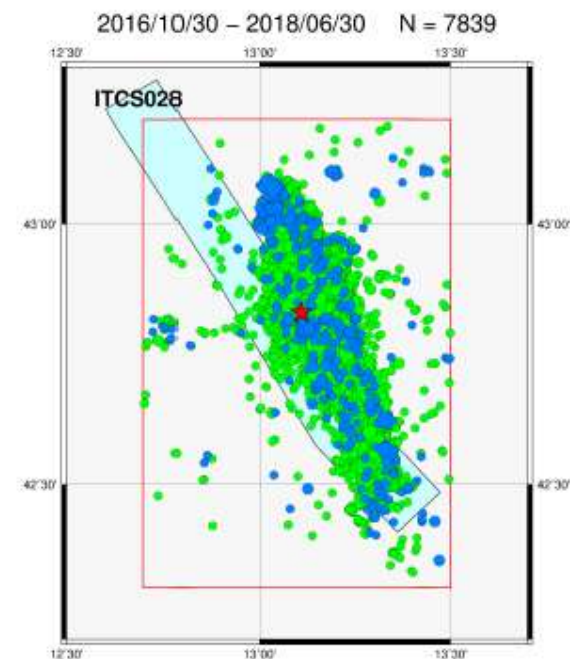
prima di Amatrice



tra Amatrice e Norcia



dopo Norcia



Variazione temporale della distribuzione della **magnitudo**



Considerato il **modello fisico di interazione frammento-asperità** (Silva et al., 2006) ed effettuato un cambio di variabili $x \propto E^{2/3}$ e $\log_{10} M_0 = 1.5 M_w + 9.1$ per ricondursi alla magnitudo, la **distribuzione q -esponenziale** diventa:

$$\frac{f(M)}{1 - F(m_0)} = \frac{(\ln 10) \frac{10^M}{a^{2/3} X_q} \left[1 - \frac{1-q}{2-q} \cdot \frac{10^M}{a^{2/3} X_q} \right]^{1-q}}{\left[1 - \frac{1-q}{2-q} \cdot \frac{10^{m_0}}{a^{2/3} X_q} \right]^{1-q}} \quad 1 < q < 2, \quad M \geq m_0$$

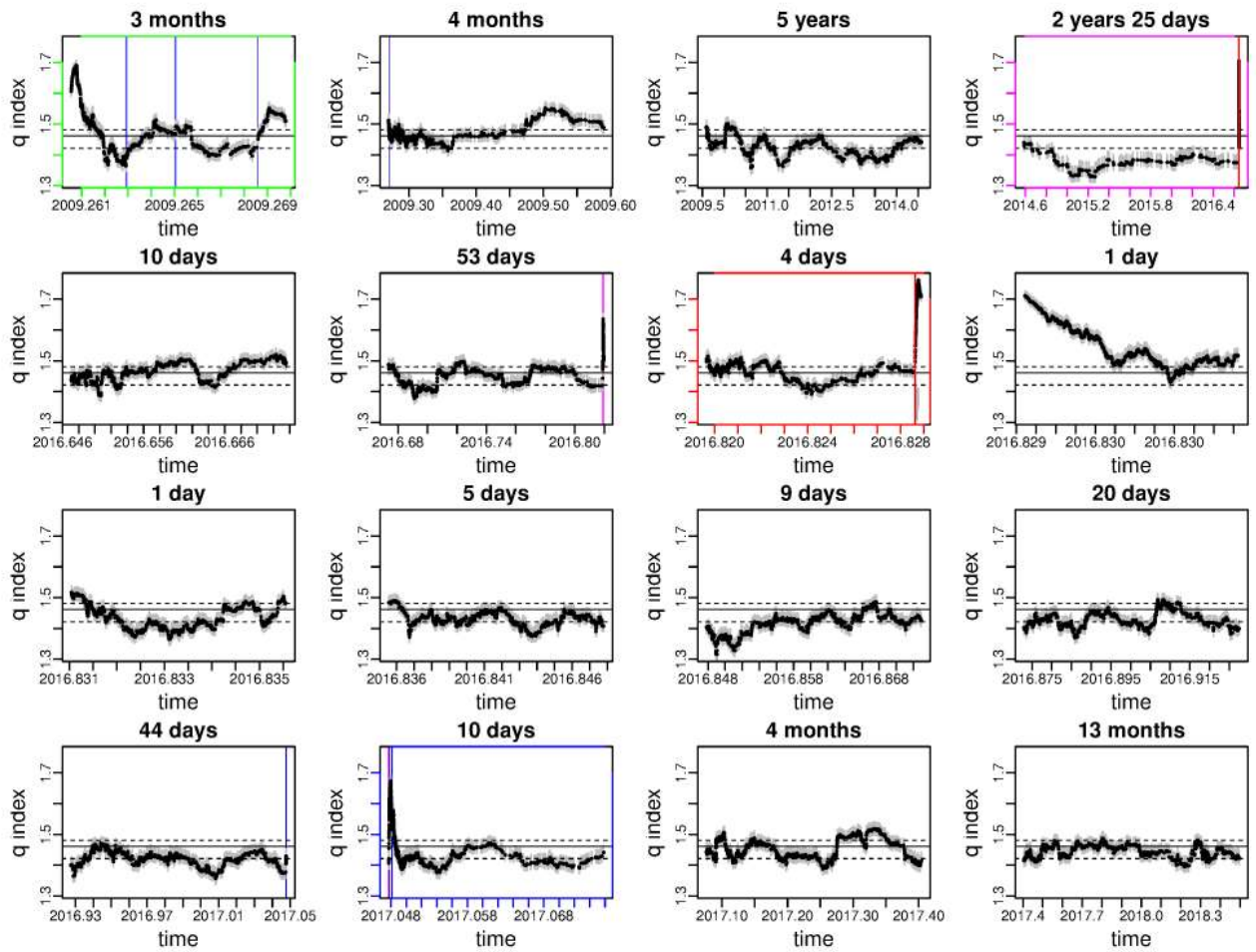
Per $q \rightarrow 1$, si ottiene la **distribuzione esponenziale** (*legge sperimentale di Gutenberg-Richter, 1944*).

Variazione temporale della distribuzione della **magnitudo**



Sequenza sismica di Amatrice-Norcia

$M_w \geq 2$

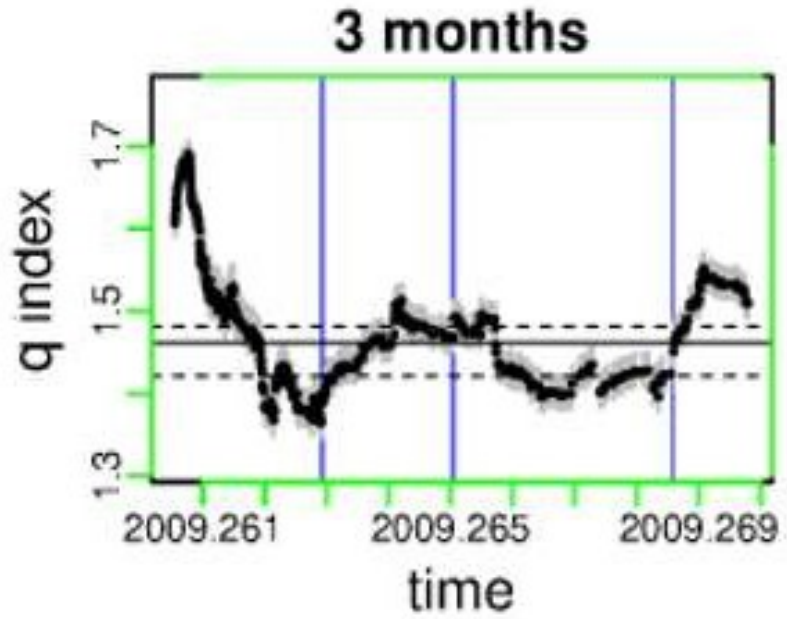


Variazione temporale della distribuzione della **magnitudo**

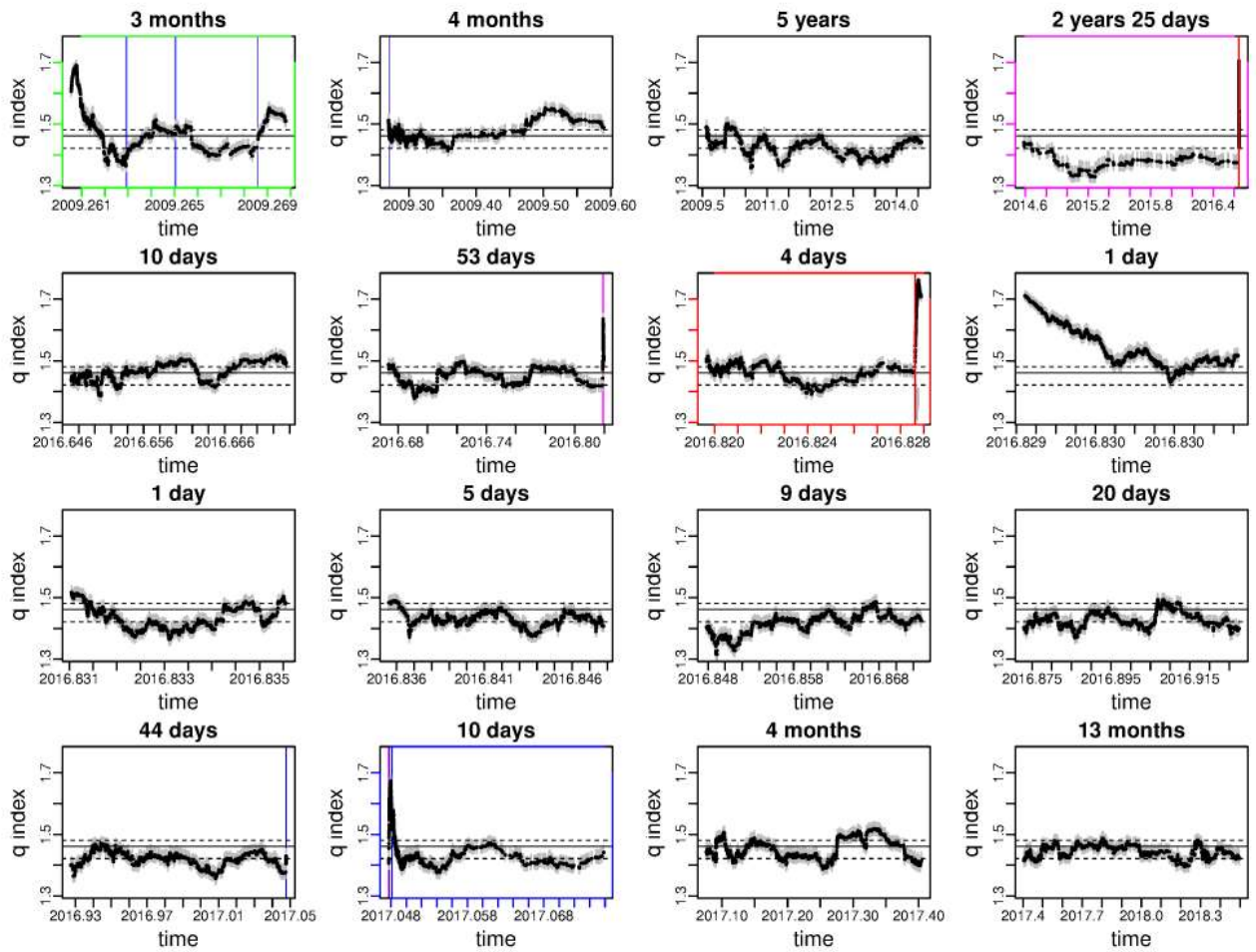


Sequenza sismica di Amatrice-Norcia

Porzione di sequenza di L'Aquila



$M_w \geq 2$



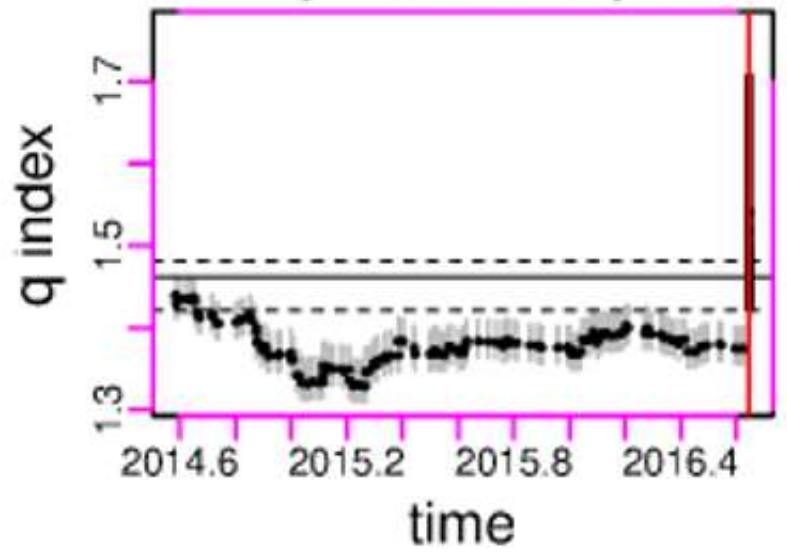
Variazione temporale della distribuzione della **magnitudo**



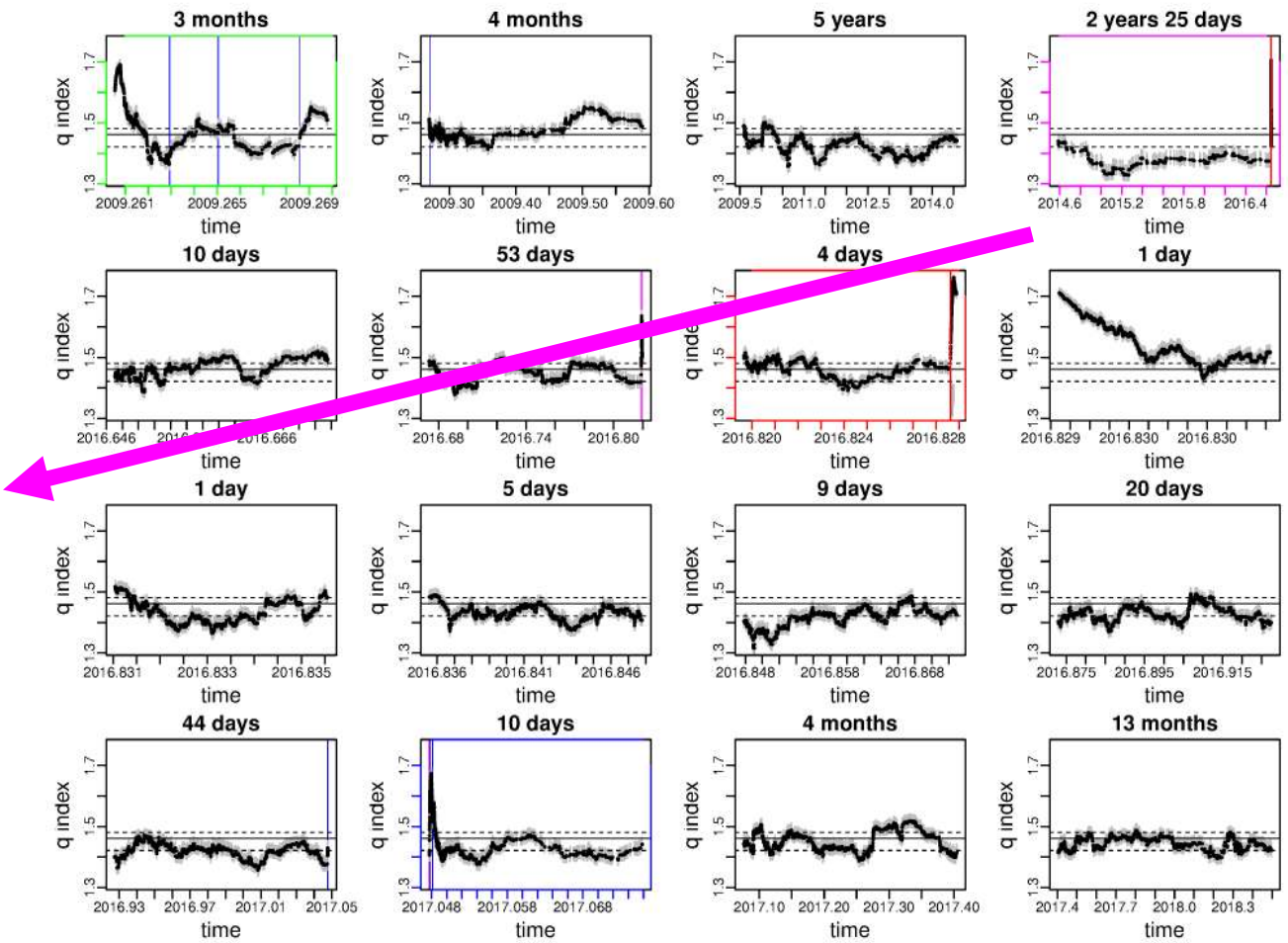
Sequenza sismica di Amatrice-Norcia

prima di Amatrice

2 years 25 days



$M_w \geq 2$

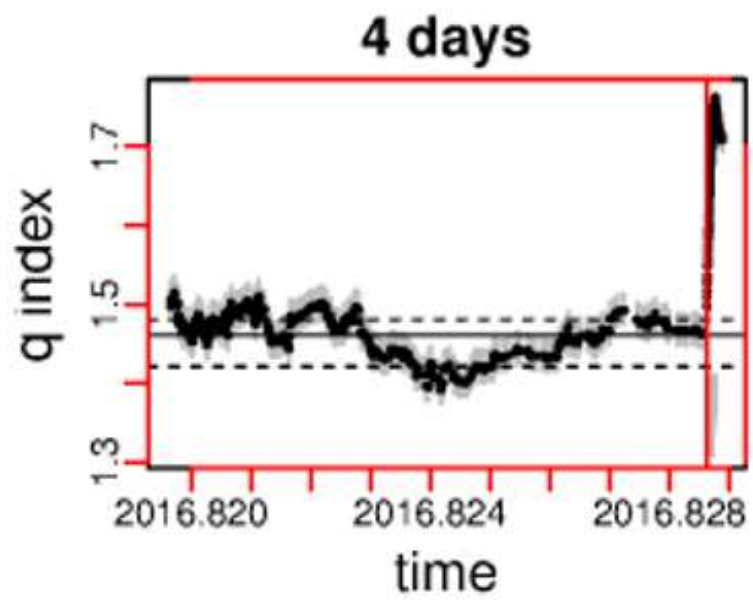


Variazione temporale della distribuzione della **magnitudo**

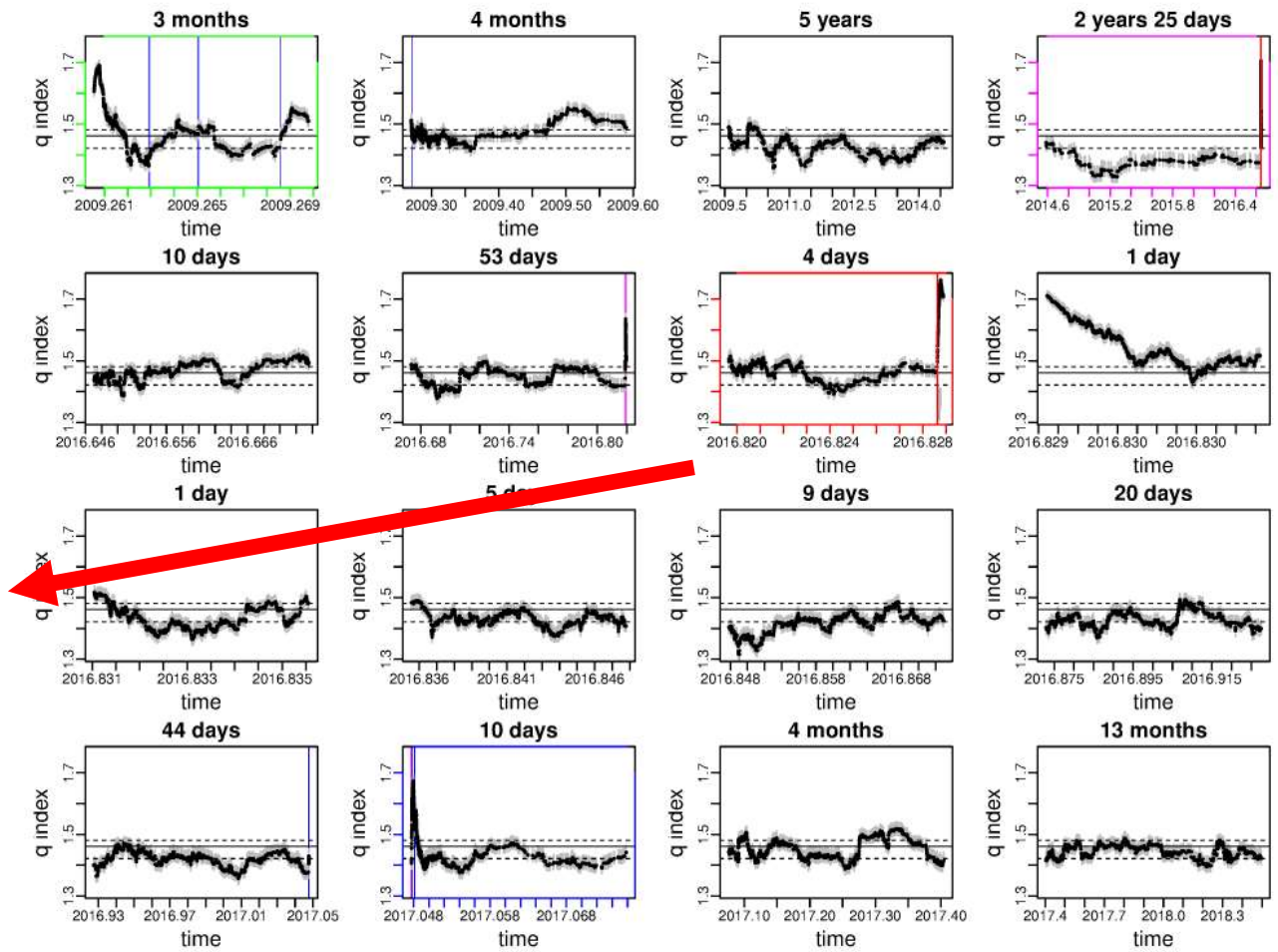


Sequenza sismica di Amatrice-Norcia

prima di Norcia



$M_w \geq 2$



References



Analisi delle variazioni temporali della distribuzione della **magnitudo** (in questa presentazione) :

Rotondi R., Bressan G., Varini E. (2022)

Analysis of temporal variations of seismicity through non-extensive statistical physics.

Geophysical Journal International, 230, 1318-1337

<https://doi.org/10.1093/gji/ggac118>

Analisi delle variazioni temporali della distribuzione spaziale degli **epicentri** :

Rotondi R., Varini E. (2022)

Temporal variations of the probability distribution of Voronoi cells generated by earthquake epicentres.

Frontiers in Earth Science, 10.938348

<https://doi.org/10.3389/feart.2022.928348>

Analisi delle variazioni temporali della distribuzione dei **tempi di interevento** :

Varini E., Rotondi R. (2023)

Connection between Variations of the Probability Distribution of the Recurrence Time and Phases of the Seismic Activity.

Entropy **2023**, 25, 1441

<https://doi.org/10.3390/e25101441>

progetto PNRR Centro Nazionale HPC,
finanziato dall'Unione europea - NextGenerationEU

- La miglior distribuzione di probabilità dei parametri sismici considerati varia significativamente nel tempo.
- Le variazioni possono essere associate alle diverse fasi della sismicità con una certa potenza previsiva.
- Più un andamento è persistente, più affidabile è l'indicazione che fornisce sulla variazione temporale.